תרגיל 3 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. מצא את החלק המדומה והממשי של הפונקציות הבאות ובדוק אם הן מקיימות את תנאי קושי-רימן
(א) $f(z)=\frac{iz+2}{2i-z}$ (ב) $f(z)=\frac{1}{Im(z)+i}$

2. מצא פונקציה אנליטית $f(z)$ המקיימת $Imf(z)=\frac{y}{x^2+y^2}$ בהנתן כי $f(2)=0$

3. בדוק האם הפונקציות הבאות מקיימות את תנאי קושי-רימן:
(א) $f(z)=x^2-y^2-2ixy$ (ב) $f(z)=\log\left(x^2+y^2\right)+2i\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)$

4. תהא $f(z)$ פונקציה אנליטית כך שגם $f'(z)$ אנליטית. נציג $f(z)=u+iv$. הוכח כי מתקיים $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ ו- $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$.

5. (א) הוכח כי אם $f(z)$ אנליטית וגם $\overline{f(z)}$ אנליטית אזי $f(z)$ קבועה.
(ב) הוכח כי $f(z)$ אנליטית בתחום סימטרי Ω אם ורק אם $g(z):=\overline{f\left(\overline{z}\right)}$ אנליטית באותו התחום.

6. (א) נניח כי $P(z)=(z-z_1)(z-z_1)\ldots(z-z_k)$ כאשר $z_1,z_2,\ldots,z_k\in\mathbb{C}$ הוכח כי לכל $z\in\mathbb{C}\backslash\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_k} \quad (1)$$

(ב) נניח בנוסף כי $Re\left(z_j\right)<0$ לכל $j=1,\ldots,k$, וכי $Re\left(z\right)\geq 0$. הוכח כי $Re\left(z-z_j\right)>0$ לכל $j=1,\ldots,k$ והסק מכך כי $P'(z)\neq 0$.

7. הוכח כי כל פונקציה אנליטית שכל ערכיה ממשיים הינה קבועה.